1) ΝΔΟ η $f(x)=c$ και η $f(x)=x$ είναι συνεχείς $\forall x\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Αρκεί νδο $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R}): |x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ ⊛

Για την $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$

Προφανώς, $f(\xi)=c,\ c\in\mathbb{R}$

Άρα, $(\forall\varepsilon>0)$ ισχύει $|f(x)-f(\xi)|=|c-c|=0<\varepsilon\ \forall x,\xi\in\mathbb{R}$

Άρα, για οποιοδήποτε $\delta>0$ και $\forall x\in\mathbb{R}$ με $|x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$

Συνεπώς, η $f(x)=c,\ c\in\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση $\forall x\in\mathbb{R}$

Για την $f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$

Προφανως, $f(\xi)=\xi,\ \xi\in\mathbb{R}$

Άρα, $|f(x)-f(\xi)|=|x-\xi|<\varepsilon=\delta$ ← Προφανώς

Συνεπώς, η $f(x)=x,\ x\in\mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$

2) ΝΔΟ η $f(x)=\sqrt{x},\ \forall x\geq 0$ συνεχής στο Π.Ο της

ΛΥΣΗ

Αρκεί νδο $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\geq 0): |x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$.

Με $|f(x)-f(\xi)|=|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|$

Θα πρέπει $\xi\geq 0$, άρα:

- $\xi>0$, $|f(x)-f(\xi)|=|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|=\dfrac{|x-\xi|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}}<\varepsilon$, ① $\forall x\geq 0$ και $|x-\xi|<\delta$

όπου, $x\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{\xi}\geq\sqrt{\xi} \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}$

Άρα ① είναι

$$\frac{|x-\xi|}{\sqrt{x}+\sqrt{\xi}}\leq\frac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}}<\varepsilon.\ \forall x\geq 0 \text{ και } |x-\xi|<\delta$$

$$\Rightarrow \frac{|x-\xi|}{\sqrt{\xi}}<\frac{\delta}{\sqrt{\xi}}<\varepsilon \Rightarrow \delta<\varepsilon\sqrt{\xi}$$ (Άρα, αρκεί το $\delta=\varepsilon\sqrt{\xi}$)

- $\xi=0$, $|f(x)-f(\xi)|=|\sqrt{x}-\sqrt{\xi}|=\sqrt{x}<\varepsilon\ \forall x\geq 0$ και $|x-\xi|<\delta$

Αρκεί να πάρουμε $\delta=\varepsilon^2$ άρα $\sqrt{x}<\varepsilon \Rightarrow x<\varepsilon^2=\delta$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (ΣΕΛ 223)

4.1) Μέσω του ε-δ ορισμού ΝΔΟ οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχής:

α. $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$, γ. $f(x)=\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$

β. $f(x)=\frac{-1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$, δ. $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

α. Αρκεί νδο $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x>0): |x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$

Όπου, $|f(x)-f(\xi)|=\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{\xi}\right|=\frac{|\xi-x|}{x\cdot\xi}=\frac{|x-\xi|}{x\cdot\xi}$ ①

• Έστω $\delta=\frac{\xi}{2}$, άρα $|x-\xi|<\frac{\xi}{2}\Rightarrow -\frac{\xi}{2}<x-\xi<\frac{\xi}{2}\Rightarrow \frac{\xi}{2}<x<\frac{3\xi}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\xi^2}{2}<x\cdot\xi<\frac{3\xi^2}{2}\Rightarrow \boxed{\frac{2}{3\xi^2}<\frac{1}{x\cdot\xi}<\frac{2}{\xi^2}}$

Άρα, στην ① έχουμε:

$$\frac{|x-\xi|}{x\cdot\xi}<\delta\cdot\frac{2}{\xi^2}<\varepsilon\Rightarrow\delta<\frac{\varepsilon\cdot\xi^2}{2}$$

Άρα $\delta=\min\left\{\frac{\xi}{2},\frac{\varepsilon\xi^2}{2}\right\}$

β. Αρκεί, νδο $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x>0): |x-\xi|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$

Όπου, $|f(x)-f(\xi)|=\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\xi^2}\right|=\frac{|\xi^2-x^2|}{x^2\cdot\xi^2}=\frac{|x^2-\xi^2|}{x^2\xi^2}=\frac{|x-\xi||x+\xi|}{x^2\cdot\xi^2}$ ①

• Έστω $\delta=1$, $|x-\xi|<1\Rightarrow -1<x-\xi<1\Rightarrow\boxed{\xi-1<x<1+\xi}\Rightarrow$

$\Rightarrow \xi-1+\xi<x+\xi<1+\xi+\xi\Rightarrow 2\xi-1<x+\xi<1+2\xi$

• $\xi-1<x<\xi+1\Rightarrow(\xi-1)^2<x^2<(\xi+1)^2\Rightarrow(\xi-1)^2\cdot\xi^2<x^2\cdot\xi^2<(\xi+1)^2\cdot\xi^2\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{(\xi+1)^2\cdot\xi^2}<\boxed{\frac{1}{x^2\cdot\xi^2}<\frac{1}{(\xi-1)^2\cdot\xi^2}}$

Άρα, ① είναι

$$\frac{|x-\xi||x+\xi|}{x^2\cdot\xi^2}<\frac{\delta(1+2\xi)}{(\xi-1)^2\cdot\xi^2}<\varepsilon\Rightarrow\delta<\frac{\varepsilon(\xi-1)^2\cdot\xi^2}{1+2\xi}$$

Άρα, $\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon(\xi-1)^2\cdot\xi^2}{1+2\xi}\right\}$

γ. Αρκεί νδο $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R}): |x-\xi|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$ $\boxed{|\eta\mu x|\le|x|,\ x\in\mathbb{R}}$

Όπου, $|f(x)-f(\xi)| = |\eta\mu x - \eta\mu\xi| = \left|2\eta\mu\left(\frac{x-\xi}{2}\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+\xi}{2}\right)\right| \le$

$\le 2\left|\eta\mu\left(\frac{y_\nu-\eta}{2}\right)\right|\left|\sigma\upsilon\nu\left(\frac{y_\nu+\eta}{2}\right)\right| \le |\underset{\substack{\downarrow\\ x}}{y_\nu} - \underset{\substack{\downarrow\\ \xi}}{\eta}| < \delta = \varepsilon$

δ.

$|f(x)-f(\xi)| = |\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu\xi| = \left|-2\eta\mu\left(\frac{x-\xi}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{x+\xi}{2}\right)\right| \le \left|2\eta\mu\left(\frac{x-\xi}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{x+\xi}{2}\right)\right|$

$\le 2\left|\eta\mu\left(\frac{y_\nu-\eta}{2}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{y_\nu+\eta}{2}\right)\right| \le |\underset{\substack{\downarrow\\ x}}{y_\nu} - \underset{\substack{\downarrow\\ \xi}}{\eta}| < \delta = \varepsilon$

4.2) β. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}\cdot\eta\mu\, e^{-1/x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ Να εξετάσετε αν είναι συνεχής μέσω του ε-δ ορισμού στο $x_0=0$

ΛΥΣΗ

· $x>0$, Θα πρέπει $\forall x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ με $x_\nu\in D(f)$ με $x_\nu\to 0 \Rightarrow f(x_\nu)\to f(0)$

Θέτω $e^{-1/x} = y$, Άρα $\forall x>0$, $\boxed{f(x) = y\cdot\eta\mu y}$

Θεωρώ ακολουθία $x_\nu, \nu\in\mathbb{N}$ τυχούσα των $x_\nu\in(0,+\infty)$

Άρα, $x_\nu\to 0 \Rightarrow \lim x_\nu = 0$ και $f(x_\nu) = x_\nu\cdot\eta\mu x_\nu,\ \forall x_\nu\in(0,+\infty)$

ΣΥΝΕΠΩΣ, $\lim f(x_\nu) = \lim x_\nu\cdot\eta\mu x_\nu = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to 0} y\cdot\eta\mu y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} e^{-1/x}\cdot\eta\mu e^{-1/x} = 0 = f(0),\ \forall x>0$

Η f συνεχής στο $x_0=0$!!!

4.6) Αν $k>0$ και $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ενώ

$|f(x)-f(y)| \le k|x-y|,\ x,y\in\mathbb{R}$

ΝΔΟ η f συνεχής συνάρτηση

ΛΥΣΗ

Θα πρέπει $(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in\mathbb{R}): |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\boxed{\mu\varepsilon\ \xi=y}$

Θα πρέπει $k|x-y| = \varepsilon \to |x-y| = \frac{\varepsilon}{k} = \delta \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{\varepsilon}{k}}$

Άρα, η f συνεχής συνάρτηση.